PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.
ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

1. a. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ell n x \, dx$ et calculer sa valeur.

b. Pour n entier non nul, on note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell n\left(\frac{k}{n}\right)$.

En utilisant la monotonie de la fonction logarithme, établir l'encadrement

(1) $\quad S_n \leq \int_{1/n}^{1} \ell n x \, dx \leq S_n + \frac{1}{n} \ell n n.$

Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$; en déduire un équivalent de $\ell n(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.
En reprenant l'encadrement de (1), établir l'encadrement :
(2) $\quad n \ell n n - n + 1 \leq \ell n(n!) \leq n \ell n n - n + 1 + \ell n n.$

Application numérique :

$n = 10$: utilisez une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ell n(10)$ pour écrire l'encadrement (2) correspondant.

2. Soit n un entier non nul fixé.

a. Justifier l'égalité : $e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$ où $u_k(n) = \frac{n^k}{k!}$.

Montrer que la suite $k \longrightarrow u_k(n)$ est monotone croissante pour k inférieur à une valeur k_0 à préciser, puis monotone décroissante pour k supérieur à k_0.

b. On veut trouver un nombre α réel tel que $u_n(n) = \frac{n^n}{n!}$ soit équivalent à $Ke^n n^\alpha$ (K : constante) quand n tend vers $+\infty$, et pour cela, on étudie la suite $v_n = \frac{e^n n^\alpha}{u_n(n)}$.

b1. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (u=0) de la fonction $f(u) = 1 + \left(\frac{1}{u} - 1 - \alpha\right)\ell n(1-u)$.

b2. Donner l'expression de $\ell n\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ au moyen de $f\left(\frac{1}{n}\right)$; trouver un équivalent de $\ell n\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ quand n tend vers $+\infty$; montrer qu'il existe une et une seule valeur de α (notée α_0) à préciser, telle que la série de terme général $\ell n\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ converge. En déduire que pour $\alpha = \alpha_0$ la suite (v_n) a une limite non nulle. Conclure.

3. Les résultats de la question 2. permettent d'établir l'équivalent :

$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{K} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On se propose dans cette question de calculer la constante K en utilisant la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$.

a. Etablir l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$.

b. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-2}. Donner l'expression de I_{2n} et I_{2n+1} en utilisant des factorielles.

c. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ et écrire l'expression de $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ au moyen de factorielles.

d. Donner la valeur de la constante K.

4. On considère une succession de (2n) épreuves indépendantes ($n \in \mathbb{N}^*$), chaque épreuve n'ayant que deux résultats possibles équiprobables "Succès" ou "Echec". On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus dans ces (2n) épreuves et $a_k(n) = Pr(X = n+k)$.

   a. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X, ainsi que l'expression de $a_k(n)$ au moyen de factorielles.

   b.

      b1. Etablir l'équivalent : $(n+k)^n \sim e^k n^n$, quand n tend vers $+\infty$ (k réel fixé).

      b2. En utilisant l'équivalent de n! établi au 3., trouver un équivalent de $a_k(n)$ quand n tend vers $+\infty$ (k entier fixé).

   c. On suppose dans cette question 4.c. les conditions C_0 :

      (C_0) : k et n tendent vers $+\infty$ et il existe deux constantes $C > 0$ et $\varepsilon \in]0, 2/3[$ telles que $k \leq Cn^{\varepsilon}$.

      c1. Montrer qu'il existe un entier N tel que $\forall\, n \geq N, \frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}$.

      c2. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que,

      $\forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], |\ell n(1+x) - x| \leq Mx^2$.

      c3. Vérifier que : $\ell n\left(a_k(n)\right) = \ell n\left(a_0(n)\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \ell n\left(1 - \frac{j}{n}\right) - \sum_{j=1}^{k} \ell n\left(1 + \frac{j}{n}\right)$.

      c4. Sous les conditions C_0, démontrer l'équivalence $a_k(n) \underset{(C_0)}{\sim} a_0(n).e^{-\frac{k^2}{n}}$.

      On donne la valeur $\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

      c5. Sous les conditions C_0, montrer l'équivalence : $a_k(n) \underset{(C_0)}{\sim} f(k)$ où f est la densité d'une loi normale à préciser.

5. Soit X_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$, et k un entier fixé. En utilisant 3., trouver un équivalent quand λ tend vers $+\infty$ de la probabilité $Pr(X_\lambda = \lambda+k)$.

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : Ce sujet comporte 4 pages de texte.

L'épreuve est constituée par un problème d'analyse et un petit problème de probabilité.

PROBLEME

Préambule : Dans tout le problème, on désigne par m une constante réelle non nulle donnée ; $k > 0$ est un paramètre réel.
On appelle G l'espace vectoriel des fonctions réelles définies, et indéfiniment dérivables sur l'intervalle ouvert $]0,1[$;
E est le sous-espace vectoriel de G formé des fonctions y de G telles que l'intégrale $\int_0^1 y(t)dt$ soit convergente. Pour toute fonction y de E on désigne par Y la primitive de y définie sur $]0,1[$ qui s'annule en $x = 1/2$.
On appelle F_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur $]0,1[$ et de degré inférieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE I

1. a. Démontrer que pour toute fonction y de E la fonction Y est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

   b. Démontrer que pour toute fonction y de E et $k > 0$, $\int_0^{1/2} t^k y(t)dt$ est une intégrale convergente (intégrer par parties).

   c. Démontrer que pour toute fonction y de E, $\int_0^1 t^k y(t)dt$ est convergente.

2. Vérifier que $F_n \subset E \subset G$ et que les inclusions sont strictes.

On définit l'application T_k de E dans G par la formule :

$$\forall\, y \in E,\ \forall\, x \in]0,1[,\quad \Big(T_k(y)\Big)(x) = y'(x) + m\int_0^1 t^k y(t)dt.$$

Partie II

1. a. Démontrer que T_k est une application linéaire de E dans G.

   b. Soit $y(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ où $0 < x < 1$; calculer $T_k(y)$.

   c. Même question pour $y(x) = \ell n(x)$, $0 < x < 1$.

2. a. Déterminer le noyau de T_k.

   b. Déterminer les valeurs du paramètre réel a de telle sorte que la fonction z : $x \longrightarrow z(x) = x^a \ell n(x)$ soit dans E. Calculer alors $f_0 = T_k(z)$.

   c. Déterminer les fonctions y telles que $T_k(y) = f_0$ selon m et $k > 0$.

   b. On prend, dans cette question, $k = 2$. Soit λ un réel non nul. Calculer une fonction y_λ de E non nulle telle que $T_2(y_\lambda) = \lambda y_\lambda$.

3. Soit f une fonction de E et $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, $(0 \le x \le 1)$.

   a. Etablir que $\displaystyle\int_0^1 x^k g(x)dx = \frac{1}{k+1}\int_0^1 (1-x^{k+1})f(x)dx$.

   Soit I_k le nombre ainsi défini.

   b. On se propose de démontrer que l'image de T_k contient E ; pour cela on considère, pour t quelconque entre 0 et 1, l'équation :

   (1) $t^k y'(x) + mt^k \displaystyle\int_0^1 u^k y(u)du = t^k f(x)$, définie pour tout $x \in]0,t]$ où f est donnée dans E et où y de E est inconnue et supposée, par hypothèse, de limite finie p en 0.
   En intégrant (1) successivement par rapport à x puis par rapport à t sur des intervalles adéquats, démontrer que l'on a les deux possibilités suivantes :

   (*) Si $m \neq -k-2$ alors $y(x) = p - mxA_k + g(x)$ où A_k est un réel qui s'exprime en fonction de k, m, p et de I_k (cf. question 3.a.).

   (**) Si $m = -k-2$ alors $y(x) = -mxA + g(x) + B_k$ où A est un paramètre réel et où B_k s'exprime en fonction de k et de I_k (g est définie ci-dessus).

   c. Retrouver le noyau de T_k. Conclure la question 3.b.

4. L'équation $T_k(y) = f$ où f est donnée dans E peut-elle avoir une solution y appartenant à E et sans limite en 0 ?

5. Dans cette question on prend $k = 1$, $f_1(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et $f_2(x) = \dfrac{1}{f_1(x)}$.

   a. Calculer des primitives de f_1 et f_2 sur $]0,1[$.

   b. Soit $m \neq -3$; calculer, si cela est possible, y_1 et y_2 de E telles que $T_1(y_1) = f_1$ et $T_1(y_2) = f_2$.

   c. Soit $m = -3$; même question qu'au 5.b.

PROBABILITES

Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10. On dispose en outre d'une réserve illimitée de boules noires.
On effectue une suite de tirages-remises de la façon suivante :
on tire au hasard une boule de l'urne et on la remplace par une boule noire de la réserve.

On définit sur un espace probabilisé associé les variables aléatoires suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :
- $Y_{n,1}$ telle que $Y_{n,1} = 1$ si à l'issue du tirage numéro n la boule rouge n°1 est toujours dans l'urne et $Y_{n,1} = 0$ sinon.
- Z_1 désigne le numéro du tirage à l'issue duquel pour la première fois la boule rouge n°1 n'est plus dans l'urne.
- R_n désigne le nombre de boules rouges qui subsistent dans l'urne à l'issue du tirage numéro n.

1. Déterminer la loi de $Y_{n,1}$.

2. Déterminer la loi de Z_1 puis l'espérance et la variance de Z_1.

3. Donner les lois des variables R_2 et R_3.

4. Calculer les probabilités $P(R_n=9)$, $P(R_n=8)$ et $P(R_n=7)$.

5. Déterminer l'espérance de R_n et la loi de $D_n = R_n - R_{n+1}$.